

ÔN TẬP VỀ PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nhân đơn thức với đa thức:

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

2. Nhân đa thức với đa thức:

Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

3. Những hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

4. Phân tích đa thức thành nhân tử:

Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

5. Chia đơn thức cho đơn thức:

Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau:

- Chia hệ số của đơn thức A cho đơn thức B .
- Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến trong B .
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

6. Chia đa thức cho đơn thức:

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B), ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

BÀI TẬP MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = (x - a)(x - b)(x - c)$, trong đó:

$$a + b + c = 12; ab + bc + ca = 47; abc = 60.$$

- a) Hãy viết P dưới dạng một đa thức thu gọn, sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến.
b) Tính giá trị của P khi $|x| = 3$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc \\ &= x^3 - 12x^2 + 47x - 60. \end{aligned}$$

$$\text{b) } |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

$$\text{Khi } x = 3 \text{ thì } P = 0.$$

$$\text{Khi } x = -3 \text{ thì } P = -336.$$

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lý:

$$A = x^5 - 70x^4 - 70x^3 - 70x^2 - 70x + 29 \text{ với } x = 71.$$

Hướng dẫn giải:

Vì $x = 71$ nên $x - 1 = 70$. Thay vào biểu thức A ta có:

$$\begin{aligned} A &= x^5 - (x - 1)x^4 - (x - 1)x^3 - (x - 1)x^2 - (x - 1)x + 29 \\ &= x + 29 = 71 + 29 = 100. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $M = N = P$ biết:

$$M = a(a + b)(a + c); N = b(b + c)(b + a); P = c(c + a)(c + b).$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Vì } a + b + c = 0 \text{ nên } \begin{cases} a + c = -b \\ b + c = -a \\ a + b = -c \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } M = a(a + b)(a + c) = a \cdot (-c) \cdot (-b) = abc(1).$$

$$N = b(b + c)(b + a) = b \cdot (-a) \cdot (-c) = abc(2).$$

$$P = c(c + a)(c + b) = c \cdot (-b) \cdot (-a) = abc(3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $M = N = P$.

Ví dụ 4: Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh đẳng thức:

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a).$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VP &= 4p(p - a) = 2p(2p - 2a) = (a + b + c)(a + b + c - 2a) \\ &= (b + c + a)(b + c - a) = (b + c)^2 - a^2 = 2bc + b^2 + c^2 - a^2 = VT. \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tìm x , biết: $(x - 2)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 6(x + 1)^2 = 49$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} (x - 2)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 6(x + 1)^2 &= 49 \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 3x^3 + 6(x^2 + 2x + 1) &= 49 \\ \Leftrightarrow 24x + 25 &= 49. \\ \Leftrightarrow x &= 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 &= x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1). \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) + (x^3 + x) \\ &= (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1). \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 &= [x(x + 10)][(x + 4)(x + 6)] + 128 \\ &= (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128. \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 10x = t$, đa thức trở thành:

$$t(t + 24) + 128 = t^2 + 24t + 128 = (t + 8)(t + 16).$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 &= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) \\ &= (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8). \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + y^3 + z^3 - 3yxz$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3yxz &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + z^3 - 3xy(x + y) - 3yxz \\ &= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z). \\ &= (x + y + z)[(x + y)^2 - z(x + y) + z^2] - 3xy(x + y + z). \\ &= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy). \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx). \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

$$x^2 + xy = 2015(1)$$

$$y^2 - 3xy = 99(2)$$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $x^2 + xy = 2015 \Rightarrow x(x + y) = 2015$. Vậy x là số nguyên lẻ.

Tương tự $y^2 - 3xy = 99 \Rightarrow y(y - 3x) = 99$. Vậy y là số nguyên lẻ.

Khi x và y là những số nguyên lẻ thì $x^2 + xy$ phải là số nguyên chẵn, trái với (1).

Vậy không có số nguyên x và y nào thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 10: Tìm số tự nhiên n để mỗi phép chia sau đều là phép chia hết.

a) $15x^{n+2}y^n : 3x^3y^4$.

b) $\left(-\frac{1}{2}x^{2n}y^7\right) : \frac{3}{10}x^{n+3}y^n$.

Hướng dẫn giải:

a) $15x^{n+2}y^n : 3x^3y^4 \Leftrightarrow \begin{cases} n+2 \geq 3 \\ n \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 1 \\ n \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow n \geq 4$.

b) $\left(-\frac{1}{2}x^{2n}y^7\right) : \frac{3}{10}x^{n+3}y^n \Leftrightarrow \begin{cases} 2n \geq n+3 \\ n \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$.

Ví dụ 11: Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = x^3 - 2x^2 + 3x + 50$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = x + 3$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $A = B(x^2 - 5x + 18) - 4$.

Điều kiện để giá trị của A chia hết cho giá trị của B là $\frac{-4}{x+3}$ có giá trị nguyên.

$\Leftrightarrow x + 3 \in U(-4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$.

Ta có bảng sau:

$x + 3$	-1	1	-2	2	-4	4
x	-4	-2	-5	-1	-7	1

Vậy $x \in \{-4; -2; -5; -1; -7; 1\}$.

Ví dụ 12: Tìm giá trị của m để đa thức $M = 27x^2 + m$ chia hết cho đa thức $N = 3x + 2$.

Hướng dẫn giải:

Chia M cho N ta được số dư $m + 12$.

Để phép chia không còn dư thì $m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = -12$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1. Cho biểu thức: $A = x(x - y) + y(x + y) - (x - y)(x + y) - 2y^2$.

Với mọi giá trị của x và y thì giá trị của biểu thức đã cho là một số âm hay một số dương?

Hướng dẫn giải:

$$A = 0.$$

Vậy với mọi giá trị của x và y thì giá trị của biểu thức A luôn luôn bằng 0, không phải là một số âm và cũng không phải là một số dương.

Bài 2. Chứng minh đẳng thức:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - (x - y)^2 - (y - z)^2 - (z - x)^2 = (x + y + z)^2$$

Hướng dẫn giải:

Biến đổi về trái ta được: $VT = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Biến đổi về phải ta được: $VP = [(x + y) + z]^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Ta thấy $VT = VP$. Vậy đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - x^2 - 1$.

Hướng dẫn giải:

$$P = x - x^2 - 1 = x - x^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

Vì $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ nên $P = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4}$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là $-\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài 4. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

Hướng dẫn giải:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c.$$

Bài 5. Cho $a = x^2 - yz$; $b = y^2 - zx$; $c = z^2 - xy$.

a) Tính tổng $ax + by + cz$ và tổng $a + b + c$.

b) Chứng minh rằng $ax + by + cz = (x + y + z)(a + b + c)$.

Hướng dẫn giải:

a) $ax + by + cz = (x^2 - yz)x + (y^2 - zx)y + (z^2 - xy)z = x^3 + y^3 + z^3 - 3yxz$.

b) Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3yxz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ (Ví dụ 8).

Do đó: $ax + by + cz = (x + y + z)(a + b + c)$.

Bài 6. Tìm số tự nhiên n để đa thức $8x^4y^5 + 4x^5y^3 - 5x^6y^4$ chia hết cho đơn thức $5x^n y^{n+1}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta cần có } \begin{cases} n \leq 4 \\ n+1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 4 \\ n \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow n \leq 2 \Leftrightarrow n \in \{0; 1; 2\}.$$

Bài 7. Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = 10x^4 - 13x^3 - 9x^2 + x + 18$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x - 3$.

Hướng dẫn giải:

Chia A cho B được dư là 6.

Do đó giá trị của A chia hết cho giá trị của B $\Leftrightarrow \frac{6}{2x-3}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2x - 3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}.$$

$2x - 3$	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6
x	1	2	0,5	2,5	0	3	-1,5	4,5

Các giá trị 0,5; 2,5; -1,5; 4,5 không phải là số nguyên nên bị loại.

Vậy $x \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Bài 8. Tìm tổng $m + n$ biết đa thức $A = x^3 + mx^2 + nx + 5$ chia hết cho đa thức $B = x - 1$.

Hướng dẫn giải:

Chia A cho B ta được số dư $m + n + 6$.

Để phép chia không còn dư thì $m + n + 6 = 0 \Leftrightarrow m + n = -6$.