ÔN TẬP: ĐƯỜNG TRÒN.

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Sự xác định và các tính chất cơ bản của đường tròn:

1. Đường tròn:

– Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách đều điểm O một khoảng bằng R.

– Kí hiệu: (O, R).

2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn:

Cho đường tròn (O, R) và điểm M.

– M nằm trên đường tròn $(O, R) \Leftrightarrow OM = R$.

– M nằm trong đường tròn $(O, R) \Leftrightarrow OM < R$.

– M nằm ngoài đường tròn $(O, R) \Leftrightarrow OM > R$.

3. Cách xác định đường tròn:

Qua 3 điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn. Đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn:

– Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

– Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

II. Dây của đường tròn:

1. So sánh độ dài của đường kính và dây:

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây:

– Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm dây ấy.

– Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây:

– Trong một đường tròn:
  - Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
  - Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

– Trong hai dây của một đường tròn:
  - Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
  - Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.
  -

III. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng $\triangle$. Đặt $d = d(O,\triangle)$.

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là tiếp tuyến của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn được gọi là tiếp điểm.

2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn:
   - Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
   - Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.
3. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau:

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

4. Đường tròn nội tiếp tam giác:
   - Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.
   - Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.
5. Đường tròn bàng tiếp tam giác:
   - Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia được gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.
   - Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
   - Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

IV. Vị trí tương đối của hai đường tròn:

1. Tính chất đường nối tâm:
   - Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.

– Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.
– Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn:

Cho hai đường tròn (O, R) và (O', r). Đặt $OO' = d$.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc - Tiếp xúc trong - Tiếp xúc ngoài	1	 $d = R + r$ $d = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau - Ở ngoài nhau - (O) đựng $(O)'$	0	 $d > R + r$ $d < R + r$

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn:
– Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.
– Tiếp tuyến chung ngoài là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.
– Tiếp tuyến chung trong là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

V. Liên hệ giữa cung và dây:

1. Định lí 1:

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

2. Định lí 2:

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

3. Bổ sung:
- Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

VI. Góc nội tiếp:

1. Định nghĩa:

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

2. Định lí:

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả:

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

VII. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung:

1. Định lí:

Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

2. Hệ quả:

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

3. Định lí (bổ sung):

Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chưa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

VIII. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn:

1. Định lí 1:

Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

2. Định lí 2:

Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

IX. Cung chưa góc:

1. Quỹ tích cung chưa góc:

Với đoạn thẳng AB và góc α $(0^0 < \alpha < 180^0)$ cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB.

Chú ý:

- Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB.
- Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.
- Đặc biệt: Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

2. Cách vẽ cung chứa góc α:

- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.
- Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α.
- Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.
- Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.
- AmB được vẽ như trên là một cung chứa góc α.

3. Cách giải bài toán quỹ tích:

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình H vào đó, ta phải chứng minh hai phần:

- Phần thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.
- Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.
- Kết luận: Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H.

X. Tứ giác nội tiếp:

1. Định nghĩa:

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2. Định lí:

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0.
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp:

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có tổng số đo hai đỉnh đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.
- Tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh C và D sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.
- Chú ý: Trong các tứ giác đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

XI. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp:

1. Định nghĩa:
- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn.
- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.
2. Định lí:
- Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.
- Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và được gọi là tâm của đa giác đều.
- Tâm này là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh hoặc là hai đường phân giác của hai góc.
3. Chú ý:
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm đến đỉnh.
- Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm O đến một cạnh.
- Cho n – đa giác đều cạnh a. Khi đó:
    - Chu vi của đa giác: $2p = na$ (p là nửa chu vi).
    - Mỗi góc ở đỉnh của đa giác có số đo bằng $\frac{(n-2).180^0}{n}$.
    - Mỗi góc ở tâm của đa giác có số đo bằng $\frac{360^0}{n}$.
    - Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}} \Rightarrow a = 2R.\sin\frac{180^0}{n}$.
    - Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \frac{a}{2\tan\frac{180^0}{n}} \Rightarrow a = 2r.\tan\frac{180^0}{n}$.
    - Liên hệ giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp: $R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$.
    - Diện tích đa giác đều: $S = \frac{1}{2}nar$.

XII. Độ dài đường tròn, cung tròn:

1. Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi đường tròn):

Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:

$$C = 2\pi R \text{ hoặc } C = \pi d \ (d = 2R).$$

2. Công thức tính độ dài cung tròn:

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l cuả một cung n^0 được tính theo công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

XIII. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn:

1. <u>Công thức tính diện tích hình tròn:</u>

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức: $S = \pi R^2$.

2. <u>Công thức tính diện tích hình quạt tròn:</u>

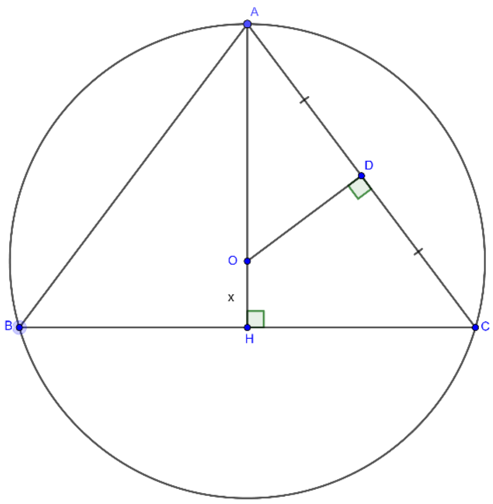
Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 được tính theo công thức:

$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$ hay $S = \frac{lR}{2}$ (l là độ dài cung n^0 của hình quạt tròn).

BÀI TẬP MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) có $AC = 40cm, BC = 48cm$. Tính khoảng cách từ O đến BC.

Hướng dẫn giải:



Kẻ đường cao AH. Ta tính được $AH = 32cm$.

Do $AH > HC$ nên tâm O nằm giữa A và H.

Đặt $OH = x$. Kẻ $OM \perp AC$.

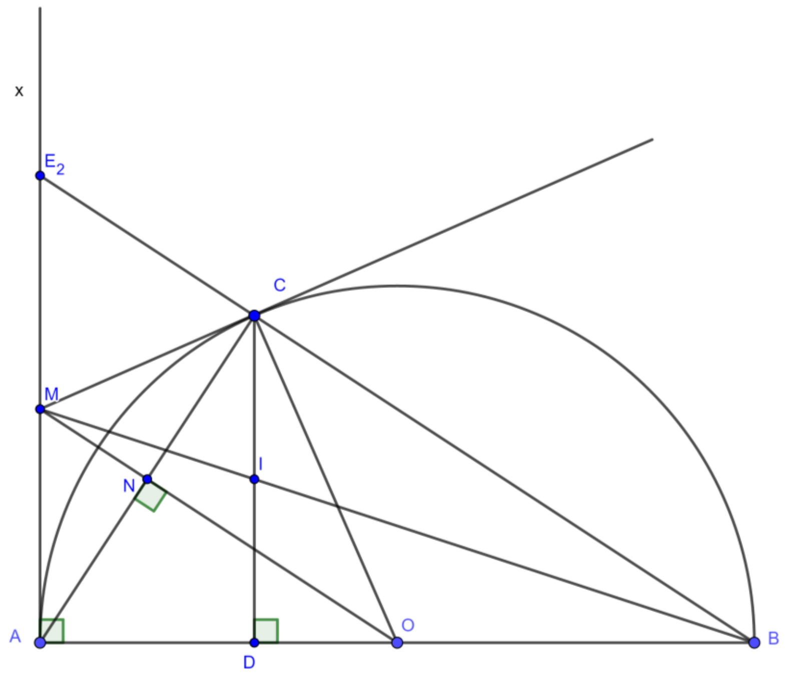
Ta có $\triangle AMO \sim \triangle AHC (g.g)$

$\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AM}{AH} \Rightarrow \frac{32-x}{40} = \frac{20}{32}$.

Từ đó $x = 7cm$.

Ví dụ 2: Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB, tiếp tuyến Ax cùng phải đối với nửa đường tròn. C là điểm bất kì trên (O) . Vẽ $CH \perp AB; OM \perp AC$ $(M \in Ax)$. Nối MB cắt CH tại I. Chứng minh rằng $CI = HI$ và MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Hướng dẫn giải:



Kéo dài BC cắt Ax tại E.

$OM \perp AC$ (1)

$\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O) \Longrightarrow \widehat{ACB} = 90^0 \Longrightarrow AC \perp EB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: OM // EB.

Vì O là trung điểm AB nên từ đó M là trung điểm AE.

Áp dụng hệ quả định lí Talet vào $\triangle MBE$, ta có: $\frac{CI}{EM} = \frac{BI}{BM} (3)$.

Áp dụng hệ quả định lí Talet vào $\triangle MBA$, ta có: $\frac{IH}{MA} = \frac{BI}{BM} (4)$.

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{CI}{EM} = \frac{IH}{MA} \Longrightarrow CI = IH$.

Gọi giao điểm cuả AC và OM là N.

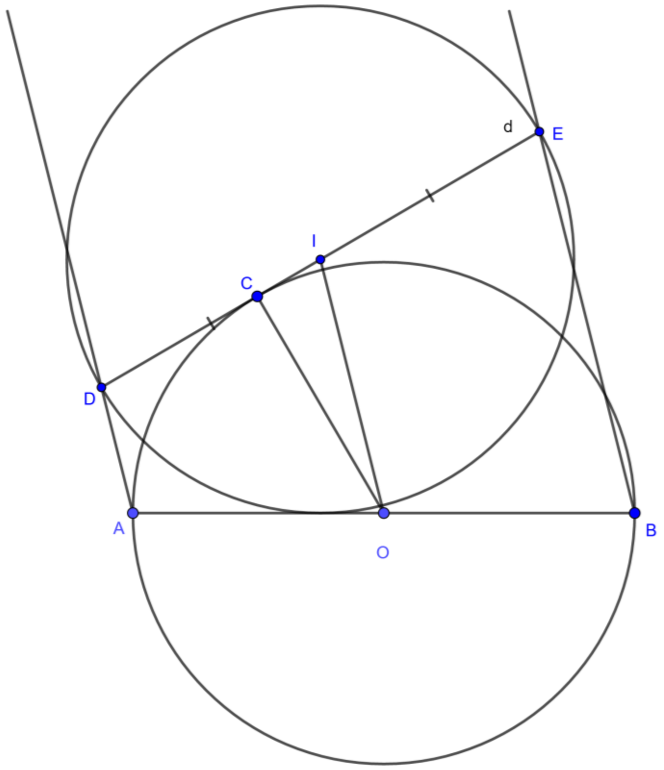
Ta có: $\triangle ONC = \triangle ONA\ (ch - cgv) \Longrightarrow \widehat{NOC} = \widehat{NOA}$.

Ta lại có: $\triangle MOC = \triangle MOA\ (c.g.c) \Longrightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^0 \Longrightarrow MC \perp OC$.

Vậy MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. C là điểm trên nửa đường tròn, vẽ tiếp tuyến d của đường tròn tại C. Qua A và B kẻ 2 đường thẳng Ax và By song song với nhau bất kì cắt tiếp tuyến d tại D và E $(D \in Ax; E \in By)$. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

Hướng dẫn giải:



Gọi I là trung điểm của DE.

$\Longrightarrow I$ là tâm đường tròn đường kính DE.

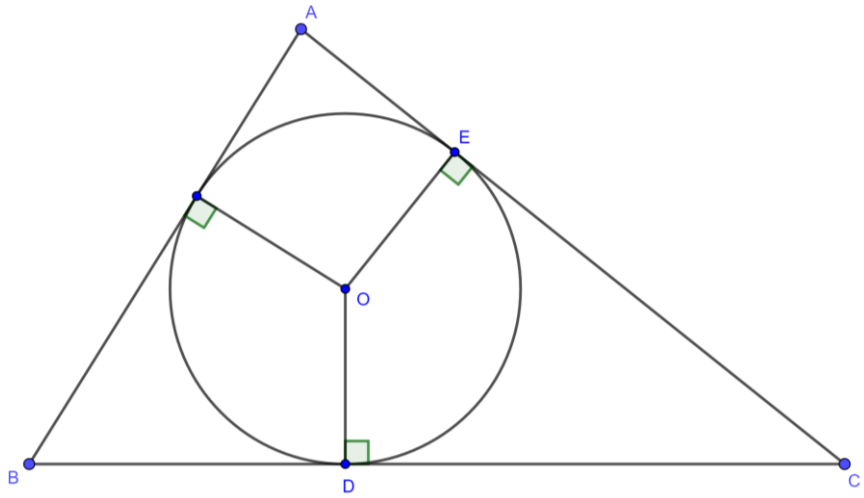
Ta có: AD // IO $\Longrightarrow S_{ODI} = S_{OAI} \Longrightarrow \frac{OC.DI}{2} = \frac{OA.IH}{2} \Longrightarrow ID = IH$.

Do đó IH cũng là bán kính của đường tròn đường kính DE.

Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

Ví dụ 4: Gọi a, b, c là số đo 3 cạnh của tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Tính diện tích tam giác theo p và r, trong đó p là nửa chu vi tam giác.

Hướng dẫn giải:



Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có: $ID = IE = IF = r$.

Nên $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABI} + S_{\triangle BCI} + S_{\triangle ACI} = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr$.

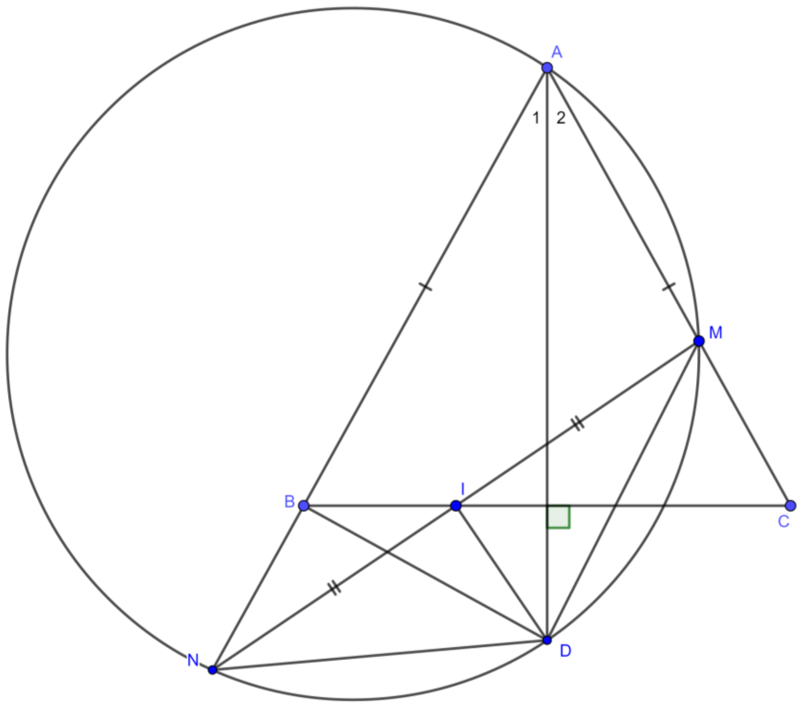
Vậy $S_{\triangle ABC} = pr$.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh AC (M không trùng A và C). Một đường thẳng đi qua điểm M cắt cạnh BC tại I và cát đường thẳng AB tại N sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MN. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm D (D không trùng A). Chứng minh rằng:

a) $DN = DM$ và $DI \perp MN$.
b) Tứ giác $BNDI$ nội tiếp.
c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua điểm cố định (khác điểm A) khi M di chuyển trên cạnh AC.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 PTTH tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 2018 – 2019)

Hướng dẫn giải:



a) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Longrightarrow \overset{\frown}{DM} = \overset{\frown}{DN} \Rightarrow DM = DN$.

Suy ra ΔDMN cân tại D có $IM = IN$.

Do đó: DI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của ΔDMN nên $DI \perp MN$.

b) Vì $\overset{\frown}{DM} = \overset{\frown}{DN} \Longrightarrow \widehat{NAD} = \widehat{MND}$ (1).

Mà $\widehat{ABC} + \widehat{NAD} = 90^0$ (2), $\widehat{NDI} + \widehat{MND} = 90^0$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{NDI}$.

Suy ra tứ giác $BNDI$ nội tiếp.

c) Theo câu b, ta có: $\widehat{NBD} = \widehat{NID} = 90^0$.

$\Longrightarrow DB \perp AB$ tại B nên đường thẳng BD cố định.

Mặt khác điểm D nằm trên đường phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$ (cố định) nên đường thẳng AD cố định, suy ra điểm D cố định.

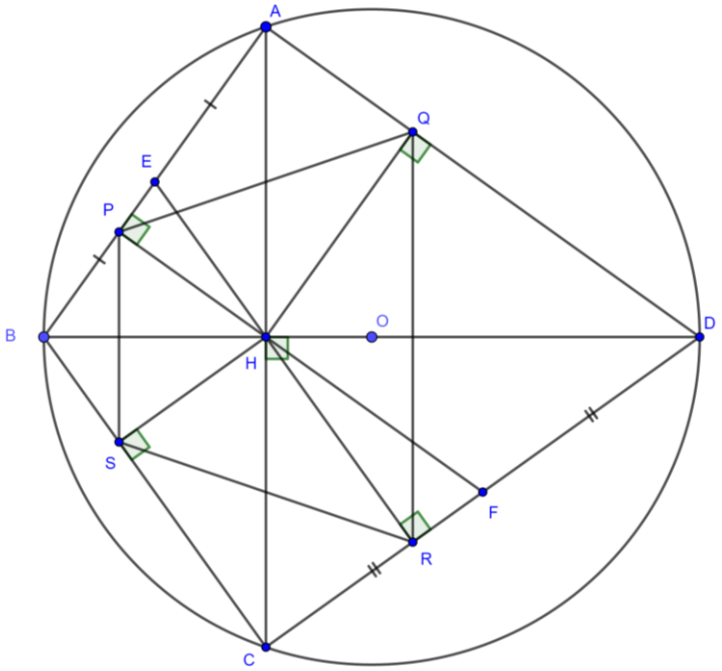
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua điểm D cố định.

Ví dụ 6: Cho đường tròn (O) có đường kính $BD = 2R$, dây AC của (O) vuông góc với BD tại H. Gọi P, Q, R, S theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AD, CD, CB.

a) Chứng minh $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$.
b) Chứng minh tứ giác $PQRS$ là tứ giác nội tiếp.
c) Chứng minh $PR + QS \leq AB + AD$.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Thừa Thiên Huế - năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải:



a) $HA^2 + HB^2 = AB^2; HA^2 + HD^2 = AD^2; HC^2 + HB^2 = CB^2; HC^2 + HD^2 = CD^2$

$\Longrightarrow 2(HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2) = 4R^2 + 4R^2$.

Vậy $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$.

b) Tứ giác $BPHS$ nội tiếp $\Longrightarrow \widehat{HPS} = \widehat{HBS} = \widehat{DBC}$.

$HPAQ$ là hình chữ nhật $\Longrightarrow \widehat{HPQ} = \widehat{HAQ} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

Do đó: $\widehat{SPQ} = \widehat{HPS} + \widehat{HPQ} = 2\widehat{CBD}$.

Tương tự $\widehat{SRQ} = 2\widehat{BDC}$.

Do $\widehat{CBD} + \widehat{BDC} = 90^0$ nên $\widehat{SPQ} + \widehat{SRQ} = 180^0$.

Vậy tứ giác $PQRS$ là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có $PR \leq HP + HR$.

Gọi E là trung điểm AB, ta có: $HP \leq HE = \frac{1}{2}AB$.

Gọi F là trung điểm CD, ta có: $HR \le HF = \frac{1}{2}CD$.

Do đó: $PR \le \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$.

Tương tự $QS \le \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$.

Mà $AB = AC; AD = CD$.

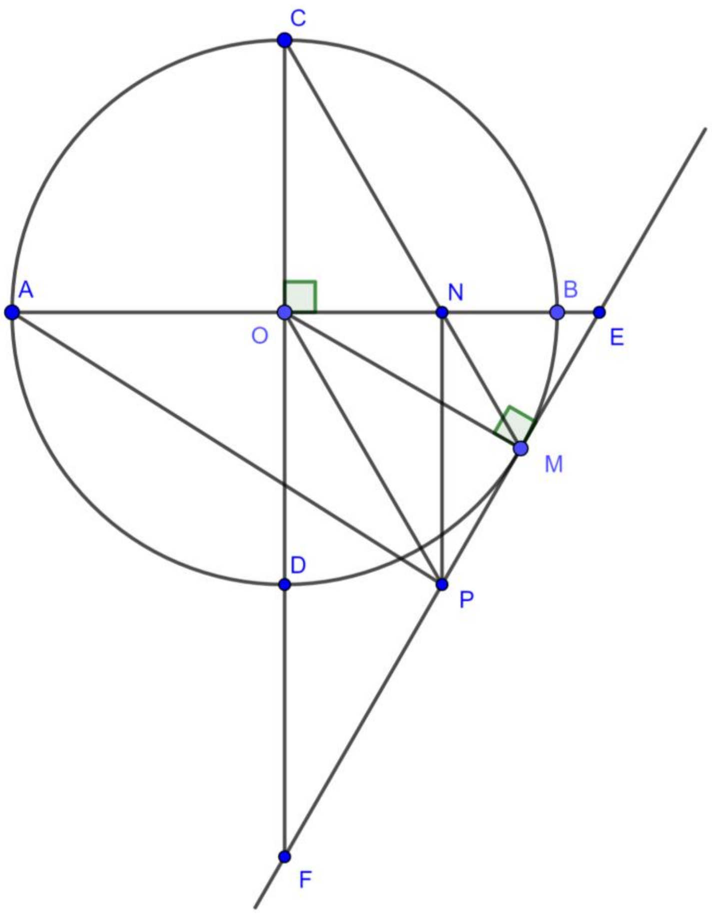
Do đó: $PR + QS \le AB + AD$.

Ví dụ 7: Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Điểm M thuộc cung nhỏ BD sao cho $\widehat{BOM} = 30^0$. Gọi N là giao điểm của CM và OB. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt OB, OD kéo dài lần lượt tại E và F. Đường thẳng qua N và vuông góc với AB cắt EF tại P.

a) Chứng minh tứ giác $ONMP$ nội tiếp.
b) Chứng minh tam giác EMN là tam giác đều.
c) Chứng minh $NC = OP$.
d) Gọi H là trực tâm của tam giác AEF. Hỏi ba điểm A, H, P có thẳng hàng? Vì sao?

(Đề tuyển sinh lớp 10 không chuyên Đắk Lắk – năm học 2019 – 2020)

Hướng dẫn giải:



a) Tứ giác $OMNP$ nội tiếp vì có M, N cùng nhìn OP dưới một góc vuông.
b) $\widehat{CME} = \frac{1}{2}\widehat{CMO} = \frac{90^0+30^0}{2} = 60^0$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

$\triangle OME$ vuông tại M, có $\widehat{MOE} = 30^0 \Longrightarrow \widehat{OEM} = 60^0$.

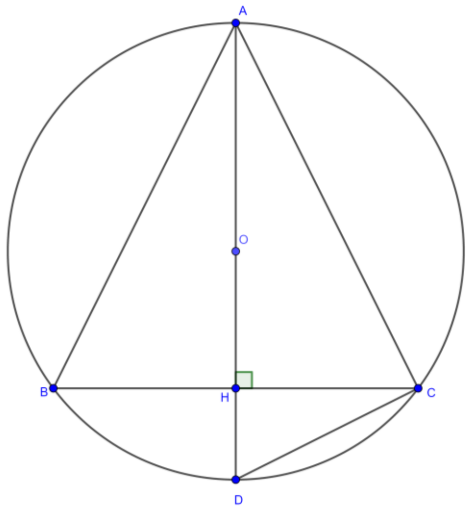
$\Longrightarrow \triangle EMN$ là tam giác đều.

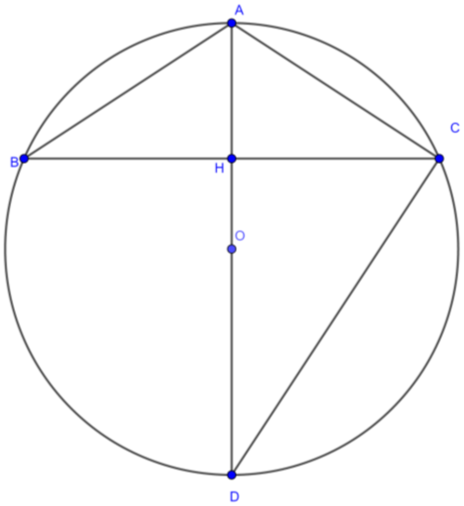
c) Tứ giác $OMNP$ nội tiếp nên $\widehat{NME} = \widehat{NOP}$ mà $\widehat{NME} = \widehat{MNE}$ nên $\widehat{NOP} = \widehat{MNE}$
$\Longrightarrow OP$ song song CM.
Tứ giác $OCNP$ có OP // CM, NP // CO nên là hình bình hành $\Longrightarrow NC = OP$.
d) $\triangle EMN$ đều, NM //OP nên $\triangle EOP$ đều.
Giả sử ba điểm A, H, P thẳng hàng $\Longrightarrow AP \perp EF$.
$\Longrightarrow \widehat{APO} = 90^0 - \widehat{OPE} = 30^0$.
$AP \perp EF \Longrightarrow$ AP // OM.
$\Longrightarrow \widehat{PAO} = \widehat{MOE} = 30^0$ (đồng vị).
Suy ra $\triangle APO$ cân $\Longrightarrow OP = OA$ (mâu thuẫn vì P nằm trên tiếp tuyến tại M của đường tròn (O)).
Vậy ba điểm A, H, P không thẳng hàng.

Bài tập tự luyện:

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O): cạnh bên bằng b, đường cao $AH = h$. Tính bán kính của đường tròn (O).

Hướng dẫn giải:





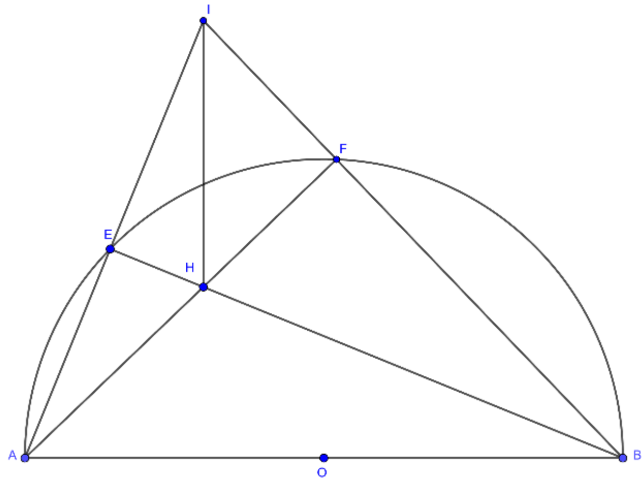
Kẻ đường kính AD thì $\widehat{ACD} = 90^0$.

Ta có: $AC^2 = AD.AH$ nên $AD = \frac{AC^2}{AH} = \frac{b^2}{h}$.

Bán kính của đường tròn bằng $\frac{b^2}{h}$.

Bài 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm E tùy ý trên nửa đường tròn đó (E khác A, B). Lấy điểm H thuộc đoạn EB (H khác E, B). Tia AH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là F. Kéo dài tia AE và tia BF cắt nhau tại I. Chứng minh tứ giác $IEHF$ nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn giải:



$\widehat{AEB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

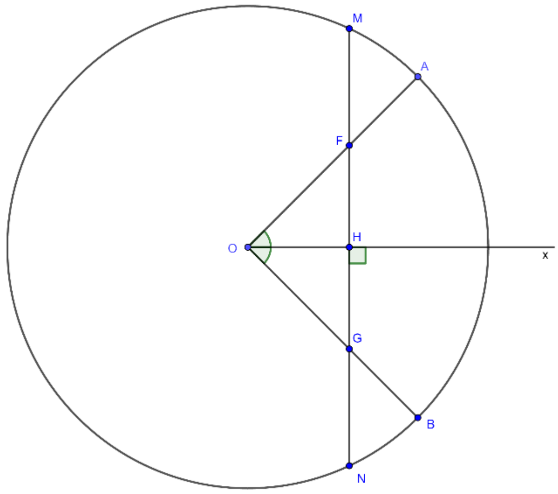
$\Longrightarrow \widehat{IEB} = 90^0$ (kề bù).

Tương tự $\widehat{HFI} = 90^0$.

Do đó $\widehat{IEB} + \widehat{HFI} = 180^0$.

Bài 3. Trong đường tròn (O) kẻ hai bán kính OA và OB tùy ý và một dây MN vuông góc với phân giác Ox của góc $\widehat{AOB}$ cắt OA ở F và cắt OB ở G. Chứng tỏ rằng $MF = NG$ và $FA = GB$.

Hướng dẫn giải:



Sử dụng tính chất đường kính dây cung chứng minh: $HM = HN$.

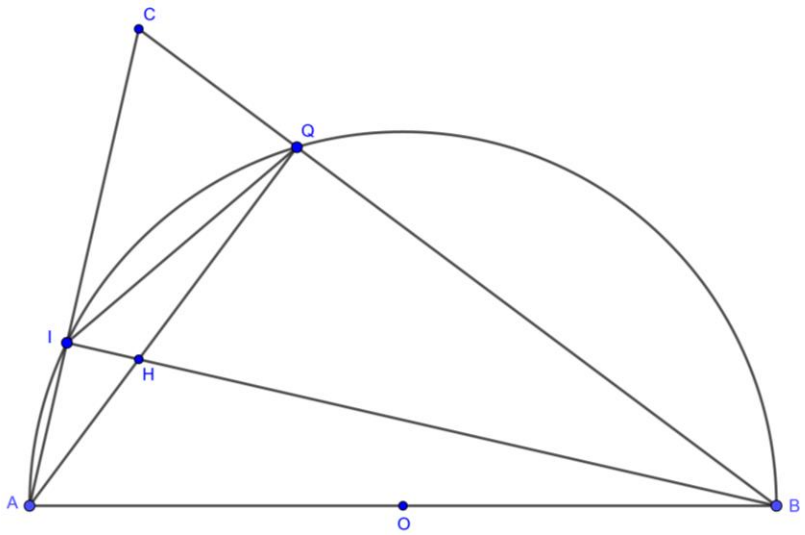
Chứng minh tam giác OFG cân để $HF = HG; OF = OG$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4. Trên nửa đường tròn đường kính AB, lấy hai điểm I, Q sao cho I thuộc cung AQ
Gọi C là giao điểm hai tia AI và BQ; H là giao điểm hay dây AQ và BI.
a) Chứng minh tứ giác $CIHQ$ nội tiếp.
b) Chứng minh $CI.AI = HI.BI$.
c) Biết $AB = 2R$. Tính giá trị biểu thức $M = AI.AC + BQ.BC$ theo R.

(Đề tuyển sinh lớp 10 không chuyên Bạc Liêu – năm học 2019 – 2020)

Hướng dẫn giải:



a) $\widehat{AIB} = \widehat{AQB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Longrightarrow \widehat{CIH} = \widehat{CQH} = 90^0$.

Xét tứ giác $CIHQ$ có: $\widehat{CIH} + \widehat{CQH} = 180^0$.

Vậy tứ giác $CIHQ$ nội tiếp.

b) $\triangle AHI \sim \triangle BCI\ (g.g) \Longrightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{HI}{CI} \Longrightarrow CI.AI = HI.BI.$

c) $M = AI.AC + BQ.BC = AC(AC - IC) + BQ(BQ + QC)$

$= AC^2 - AC.IC + BQ^2 + BQ.QC.$

$= AQ^2 + CQ^2 - AC.IC + BQ^2 + BQ.QC.$

$= (AQ^2 + BQ^2) + CQ(CQ + BQ) - AC.IC.$

$= AB^2 + CQ.BC - AC.IC.$

Tứ giác $AIBQ$ nội tiếp $\Longrightarrow \widehat{CIQ} = \widehat{CBA}$ (cùng phụ với $\widehat{AIQ}$).

$\triangle CIQ \sim \triangle CBA\ (g.g) \Longrightarrow \frac{IC}{BC} = \frac{QC}{AC} \Longrightarrow QC.BC = AC.IC \Longrightarrow QC.BC - AC.IC = 0.$

Suy ra $M = AB^2 = 4R^2$.